CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Week 4: Ch.3 Eigenvector and Diagonalization

Ch4. Probability Review

Today Topics

- Part I Chapt. 3 Eigenvalue/Eigenvector
- Break
- Chapter 4: Review Probability
- Homework 2: Due
- Homework 3 ส่งสัปดาห์หน้า ต้นชั่วโมง

Determinant

Determinants: $|\mathbf{A}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \text{Minor of } a_{11} - a_{12} \cdot \text{Minor of } a_{12} + a_{13} \cdot \text{Minor of } a_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

CPE 332

Computer Engineering Mathematic II

PART I: Linear Algebra

(Chapter 1-3)

Chapter 3 Intro

3.1 Introduction

กำหนด $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ และ Column Vector ξ ใน n-space(หรือ Matrix ขนาด $n \times 1$) ผลคูณ $\mathbf{A}\xi$ จะเป็น Matrix ขนาด $n \times 1$ ซึ่งก็คือ Column Vector ใน n-space เช่นเดียวกัน ตามปกติแล้วทิศทางของ Vector $\mathbf{A}\xi$ จะต่างจากทิศทางของ Vector ξ อย่างไรก็ตามถ้าเราสามารถหา Vector ξ ที่ทำให้ทิศทางของ $\mathbf{A}\xi$ เหมือนกันกับทิศทางของ ξ ได้ ในกรณีนี้เรากล่าวได้ว่า Vector $\mathbf{A}\xi$ จะขนานกับ Vector ξ จากที่กล่าวมาแล้วในเรื่องของ Vector โดยที่ Vector 2 ตัวจะเท่ากันก็ต่อเมื่อมันชี้ไปในทิศทางเดียวกัน และมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นถ้าให้ λ เป็นตัวคูณที่ทำให้ Vector $\mathbf{A}\xi$ เท่ากับ ξ เราจะได้สมการ $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$ ในกรณีเช่นนี้ เราเรียกค่า λ ว่าเป็น "***Eigenvalue***" และ Vector ξ ว่าเป็น "***Eigenvector***" ของ Matrix $\mathbf{A}$ ค่าทั้งสองเป็นคุณลักษณะที่สำคัญของ Matrix และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการหาคำตอบทางคณิตศาสตร์หลายๆอย่างในวิศวกรรม

นิยาม 1

ให้ A เป็น Matrix ขนาด $n \times n$ ของเลขจริงหรือเลข Complex, เลขจริงหรือเลข Complex ค่า λ จะเป็นค่า Eigenvalue ก็ต่อเมื่อมี Matrix E ขนาด $n \times 1$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้ $AE = \lambda E$ และ Matrix E ดังกล่าวเราเรียก Eigenvector ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue λ นั้น

นอกจากนั้นแล้วค่า Scalar เป็นจำนวนเท่าของ Eigenvector ก็จะเป็น Eigenvector ด้วย เนื่องจาก

$$AE = \lambda E \Rightarrow A(\alpha E) = \alpha AE = \alpha(\lambda E) = \lambda(\alpha E)$$

ตัวอย่างที่ 1

จากสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

เราสรุปว่า ค่า 0 เป็น Eigenvalue ของ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ เป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ Eigenvalue 0 นอกจากนี้ แล้วจำนวนเท่าที่ไม่ใช่ศูนย์ ของ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ จะเป็น Eigenvector ด้วย

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ดังนั้นค่า 1 จะเป็น Eigenvalue และ $E = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue ดังกล่าว เพราะว่า $AE = 1 \cdot E = E$ นอกจากนี้แล้ว Vector $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะเป็น Eigenvector ด้วย

ค่า Eigenvalue ของ A อีกค่าหนึ่งก็คือ -1 และ Eigenvector ที่เกี่ยวข้องคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ และจะรวมถึง $\begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ -4\beta \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น Eigenvector ของ A ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue -1 ด้วยเช่นกัน

3.3 การคำนวณหาค่า Eigenvalue และ Eigenvector

Theorem 1:

ให้ A เป็น $n \times n$ Matrix ของค่าจริงหรือค่า Complex ดังนั้น

1. λ จะเป็น Eigenvalue ของ A ก็ต่อเมื่อ $\left|\lambda I_n - A\right| = 0$

2. ถ้า λ เป็น Eigenvalue ของ A ดังนั้น Nontrivial Solution ใดๆของ $(\lambda I_n - A)X = 0$ จะเป็น Eigenvector

เมื่อเราขยาย Determinant ในสมการข้อที่ 1 เราจะได้ Polynomial ของ λ มี Degree เท่ากับ n Polynomial นี้เราเรียก *Characteristic Polynomial* ของ A เขียน $p_A(\lambda)$ สมการที่ได้คือสมการ $p_A(\lambda) = 0$ เราเรียก *Characteristic Equation* ของ A สังเกตว่า Characteristic Equation จะให้ค่า Eigenvalue ทั้งหมด n ค่า และบางค่าอาจจะซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 3

พิจารณา Matrix เดิม $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ เราได้ $\lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น Characteristic Polynomial จะเป็น $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

Characteristic Equation $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$ จะมีรากของสมการเท่ากับ 1 ด้วยค่า Multiplicity เท่ากับ 2 และรากของสมการเท่ากับ -1 ด้วยค่า Multiplicity เท่ากับ 1

ในการหา Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ 1 เราแก้สมการ $(I_3 - A)X = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ซึ่งจะมี Solution ทั่วไปในรูปของ $$\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ Nontrivial Solution($\alpha \neq 0$) จะเป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ Eigenvalue 1

คราวนี้ลองหา Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ Eigenvalue -1

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ เราจะได้ Solution ในรูปของ $$\begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ -4\beta \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 4

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}$ และ Characteristic Equation จะเป็น

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda + 4 = \lambda^2 - \lambda + 4 = 0$ ซึ่งมีรากเป็น Eigenvector คือ $\lambda = (1 \pm \sqrt{15}i)/2$

ในการหา Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ $(1+\sqrt{15}i)/2$ เราแก้สมการ $\left(\frac{1+\sqrt{15}i}{2}I_2 - A\right)X = 0$ กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{15}i}{2}-1 & 2 \\ -2 & \frac{1+\sqrt{15}i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ หรือ

$$\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-2x_1 + \frac{1+\sqrt{15}i}{2}x_2 = 0$$

ซึ่งถ้าดูจากสมการแรก เราได้ $x_2 = \frac{1-\sqrt{15}i}{4}x_1$ และถ้านำแทนค่าในสมการที่สองจะพบว่าสมการจะเป็นความจริงไม่ว่า x_1 จะมีค่าใดๆก็ตาม ดังนั้นเราให้ค่า $x_1 = \alpha$ เราจะได้ $x_2 = \frac{1-\sqrt{15}i}{4}\alpha$ นั่นก็คือคำตอบทั่วไปของระบบจะเป็น

$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{15}i}{4} \end{bmatrix}$ และ Matrix ใดๆก็ตามที่ค่า $\alpha \neq 0$ จะเป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue $(1+\sqrt{15}i)/2$

ขอให้นักศึกษาหา Eigenvector อีกตัวที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue $(1-\sqrt{15i})/2$ ซึ่งคำตอบจะเป็น $\beta\begin{bmatrix}1\\ \frac{1+\sqrt{15i}}{4}\end{bmatrix}$

สำหรับค่า $\beta \neq 0$

Diagonalization

นิยาม 2

Matrix ขนาด $n \times n$, $D=[d_{ij}]$ จะเรียกว่า Diagonal Matrix ถ้า $d_{ij}=0$ เมื่อ $i \neq j$

ปกติเราเขียน Diagonal Matrix โดยเขียนเฉพาะค่า Main Diagonal ของมันคือ $d_1, d_2, \ldots, d_n$ หรือเขียน

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$$

สังเกตการใส่ค่า 0 ที่มุมซ้ายล่าง และขวาบน

Theorem 2:

ให้ $D = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$ และ $W = \begin{bmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n \end{bmatrix}$ ดังนั้น

1. $DW = WD = \begin{bmatrix} d_1 w_1 & & & 0 \\ & d_2 w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n w_n \end{bmatrix}$

2. $|D| = d_1 d_2 \cdots d_n$

3. D จะเป็น Nonsingular ก็ต่อเมื่อแต่ละค่าในส่วนของ Diagonal ไม่เป็นศูนย์

4. ถ้าแต่ละค่าของ $d_i \neq 0$ ดังนั้น

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

5. ค่า Eigenvalue ของ D คือค่าของ Main Diagonal $d_1, d_2, \ldots, d_n$

นิยาม 3

ให้ A เป็น Matrix ขนาด $n \times n$ ดังนั้น A จะถูกเรียกว่า ***Diagonalizable*** ก็ต่อเมื่อมี Matrix P ขนาด $n \times n$ ที่ทำให้ $P^{-1}AP$ เป็น Diagonal Matrix

Theorem 3:

ให้ A เป็น $n \times n$ Matrix ที่มีค่า Eigenvalue เท่ากับ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ และให้ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ เป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กันตามลำดับ สมมุติว่า Eigenvector เหล่านี้เป็น Linearly Independent และให้ P เป็น Matrix ขนาด $n \times n$ ที่มีส่วนประกอบของ Column ที่ j คือ V_j ดังนั้น P จะเป็น Nonsingular และ

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น Diagonal Matrix ที่มีค่า Diagonal คือ Eigenvalue ของ A ตามลำดับของ Eigenvector ที่สัมพันธ์กัน

สังเกตว่า A ไม่จำเป็นที่จะต้องมีค่า Eigenvalue ที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว เพราะที่เราต้องการคือ Eigenvector n ตัว ที่เป็น Linearly Independent ซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างที่ 5

ให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ เราพบว่าจะมี Eigenvalue คือ -1 และ 3 ด้วย Eigenvector $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ ตามลำดับ สังเกตว่า Eigenvector ทั้งสองนั้นเป็น Linearly Independent เราสร้าง Matrix P โดยใช้ Eigenvector เป็น Column คือ

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ และเราสามารถหา Inverse ได้เป็น $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ดังนั้น

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Eigenvector อื่นๆที่สัมพันธ์กับ Eigenvalue นั้นๆสามารถนำมาใช้เพื่อทำให้ A เป็น Diagonal Matrix ได้ เช่นเราใช้ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ และเราสร้าง Matrix $Q = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ซึ่งมี Inverse $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ และ

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 6

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ เราหา Eigenvalue ได้เป็น $1,-1,-2$ และ Eigenvector ที่สัมพันธ์กันได้เป็น $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ตามลำดับ สังเกตว่าแต่ละ Eigenvector เป็น Linearly Independent ดังนั้นเราสามารถสร้าง

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ และหา } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ขอให้นักศึกษาตรวจสบว่า $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Theorem 4:

ให้ A เป็น Diagonalizable Matrix ขนาด $n \times n$ ดังนั้น A จะมี Eigenvector จำนวน n ตัวที่เป็น Linearly Independent ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $Q^{-1}AQ$ เป็น Diagonal Matrix ดังนั้นค่าของ Diagonal จะเป็น Eigenvalue ของ A และ Column ของ Q จะประกอบด้วย Eigenvector ที่สัมพันธ์กัน

จากทฤษฎีที่ 4 กล่าวว่า Necessary and Sufficient Condition สำหรับ Matrix ที่สามารถ Diagonal ได้นั้นคือจะต้องมี Eigenvector ที่เป็น Linearly Independent n ตัว มิฉะนั้นแล้ว Matrix จะทำ Diagonal ไม่ได้ และการทำ Diagonal จะต้องใช้ค่า Eigenvector เท่านั้น นอกจากนี้ Diagonal Matrix ที่ได้จะประกอบด้วย Eigenvalue

Orthogonal and Symmetric

นิยาม 4

เราเรียก A ว่าเป็น Orthogonal Matrix ถ้า $AA^T = A^T A = I_n$ หรือ $A^{-1} = A^T$

Theorem 5:

ถ้า A เป็น Orthogonal Matrix ดังนั้น $|A| = \pm 1$

นิยาม 5

Matrix A ขนาด $n \times n$ จะเป็น Symmetric ก็ต่อเมื่อ $A = A^T$

Theorem 6:

ถ้า A เป็น Real Symmetric Matrix ค่า Eigenvalue จะเป็นค่า Real

Theorem 7:

ถ้า A เป็น Real Symmetric Matrix ดังนั้น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับแต่ละ Eigenvalue จะ Orthogonal

Theorem 8:

ถ้า A เป็น Real Symmetric Matrix ดังนั้นจะมี Orthogonal Matrix ที่สามารถ Diagonalize A

- จาก Theorem ที่กล่าว จุดที่สำคัญคือ Theorem ที่ 8 สุดท้าย กล่าวคือ
  - ถ้า Matrix เป็น Real Symmetric เราจะได้ Eigenvalue เป็นค่าจริง และจะมี Orthogonal Matrix ที่จะมา Diagonalize ได้
  - เมื่อ Matrix เป็น Orthogonal มันจะหา Inverse ได้ง่าย
  - ถ้าเรา Normalized แต่ละ Eigenvector ที่คำนวณได้ให้มี Magnitude เท่ากับหนึ่ง เราจะได้ Orthogonal Matrix ที่สามารถ Diagonalize Matrix ที่ต้องการ

Break

Example 3.7 จงหา Orthogonal Matrix ที่จะมา Diagonalize Matrix $\mathbf{A}$ ดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

คำตอบ หา Eigenvalue ของ Matrix จาก Characteristic Equation $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ เราได้

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ หรือ}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)\lambda - \sqrt{2}(\sqrt{2}(\lambda - 2)) = 0$$ เมื่อจัดเรียงสมการ เราได้

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

เมื่อแก้สมการ เราได้ $\lambda = 2, 2, -1$

ค่า Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ $\lambda = -1$ หาได้จากสมการ $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เราได้

$$\mathbf{X}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$ เมื่อทำการ Normalized โดยหารด้วยขนาดของ Vector เราได้

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

ค่า Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ $\lambda = 2$ หาได้จากสมการ $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ค่า Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ $\lambda = 2$ หาได้จากสมการ $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = 0$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ในกรณีนี้ สังเกตว่า x_2 จะเป็นอะไรก็ได้ เราสมมุติให้เท่ากับ β และเราได้ $x_1 = \sqrt{2}x_3$

เราได้ Eigenvector เป็น

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$ โดยที่ β และ γ จะเป็นค่าใดก็ได้ และไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นเราสามารถสร้างสอง

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$ โดยที่ β และ γ จะเป็นค่าใดก็ได้ และไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นเราสามารถสร้างสอง

Eigenvector ที่เป็น Linearly Independent จาก $\mathbf{X}_2$ เช่นในสองกรณีที่ $\beta = 0$ และ $\gamma = 0$ คือ

$$\mathbf{V}' = \gamma \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{V}'' = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note: เราเลือก 2 vector ที่ Independent กัน โดยการแทนค่า β และ γ อะไรก็ได้

เมื่อทำการ Normalized สอง Eigenvector หลัง เราได้

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าทั้งสาม Eigenvector เป็น Linearly Independent จากนั้นเราสร้าง Matrix $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

ขอให้นักศึกษาตรวจสอบดูว่า

$$\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^{T}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{P}\mathbf{P}^{T}=\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นอกจากนี้แล้วให้ตรวจสอบดูว่า

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

End of Chapter 3

- HW 3 Due Next Week
- Chapter 4 Probability Review

Chapter 4 Probability

- Concept and Definition
  - Experiments, Event, Outcomes, Sample Space
  - Laplace Definition, Definition from Set
- Independent and Mutual Exclusive
  - Axioms of Probability, Vein Diagram, Independent concept, ME Concept
- Conditional Probability and Bayes
- PDF and CDF Concept and Properties
  - Continuous and Discrete

Definition

- Outcome/Sample Point
  - ผลลัพท์ที่ได้จากการทดลอง หรือสุ่มตัวอย่าง
- Sample Space
  - Set ของผลลัพธ์ทั้งหมด
- Event
  - เงื่อนไขของการทดลอง
- กำหนด Event A, ถ้าทดลอง N ครั้ง และได้ผลลัพธ์เป็นไปตามเงื่อนไข A = N_A ครั้ง

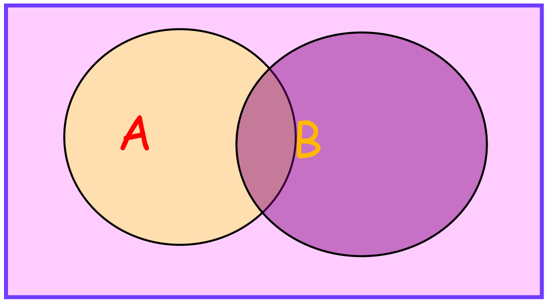
$$P[A] = \text{Probability of Event A Occur} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

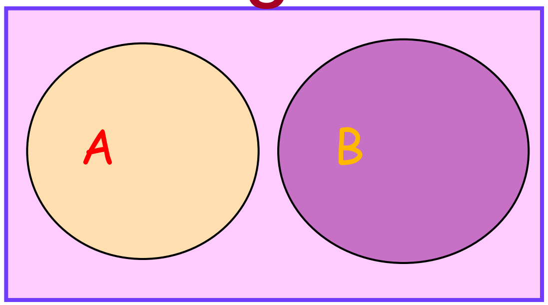
Example: Dice Roll

- Sample Space = {1,2,3,4,5,6}
- P(1)=P(2)= ... =P(6)=1/6
  - Laplace Definition of Probability
  - ถ้าแต่ละ Member ใน Sample Space มีโอกาสเกิดเท่าๆกัน
- A = Even
- A = {2,4,6}
- P(A) = |{2,4,6}|/|S| = 3/6 = ½

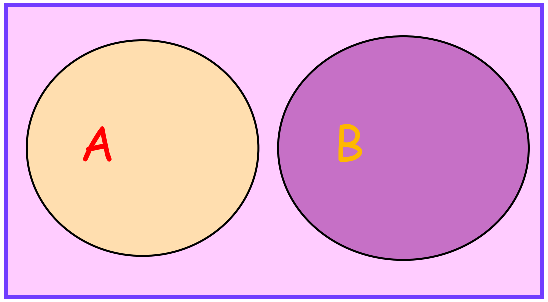
Mutually Exclusive

- A ME B
- เมื่อเกิด Event A จะเกิด Event B ไม่ได้
- เมื่อทอยลูเต๋าได้เลขคู่ จะไม่ใช่เลขคี่
  - ดังนั้นถ้า A = Even, B = Odd
  - A ME B
- P(A+B) or P(A union B) = P(A) + P(B)
- เห็นได้ชัดโดยแสดงด้วย Vein Diagram

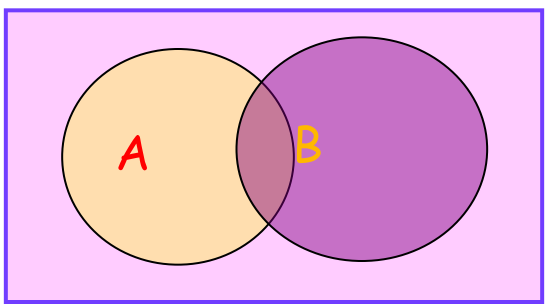




Mutually Exclusive



- ME
- $A \cap B = \varnothing$
- $A \cup B = A + B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



- Non ME
- $A \cap B \neq \varnothing$
- $A \cup B = A + B - A \cap B$
  - – Inclusion-Exclusion Principle

3 AXIOMS OF Probability

- 1. P(S) = 1
  - ทุกๆการทดลอง ผลลัพธ์ต้องอยู่ใน Sample Space
- 2. 0 =< P(A) =< 1
  - ค่าของ Probability ต้องอยู่ระหว่าง 0 และ 1
- 3. ME: P(A+B)=P(A)+P(B)
  - Mutually Exclusive; Probability ของ Union ของ Event เท่ากับผลบวกของ Probability ของแต่ละ Event

Conditional Probability

- Probability ของ Event หนึ่ง เมื่อกำหนดให้อีก Event หนึ่งได้เกิดขึ้น
  - Probability จะเพิ่มถ้าสอง Event เกี่ยวข้องกัน
  - Probability จะไม่เปลี่ยนถ้าสอง Event ไม่เกี่ยวกัน
    - เราเรียกว่าเป็น Statistical Independent

$$P[E_1 \backslash E_2] = \begin{cases} \dfrac{P[E_1 \cap E_2]}{P[E_2]} & ; P[E_2] \neq 0 \\ 0 & ; P[E_2] = 0 \end{cases}$$

    - นอกจากนี้

$$P[A \backslash B] = P[AB] / P[B], \quad P[B \backslash A] = P[AB\} / P[A]$$

$$P[A \backslash B] P[B] = P[B \backslash A] P[A]$$

$$P[A \backslash B] = P[B \backslash A] P[A] / P[B]$$

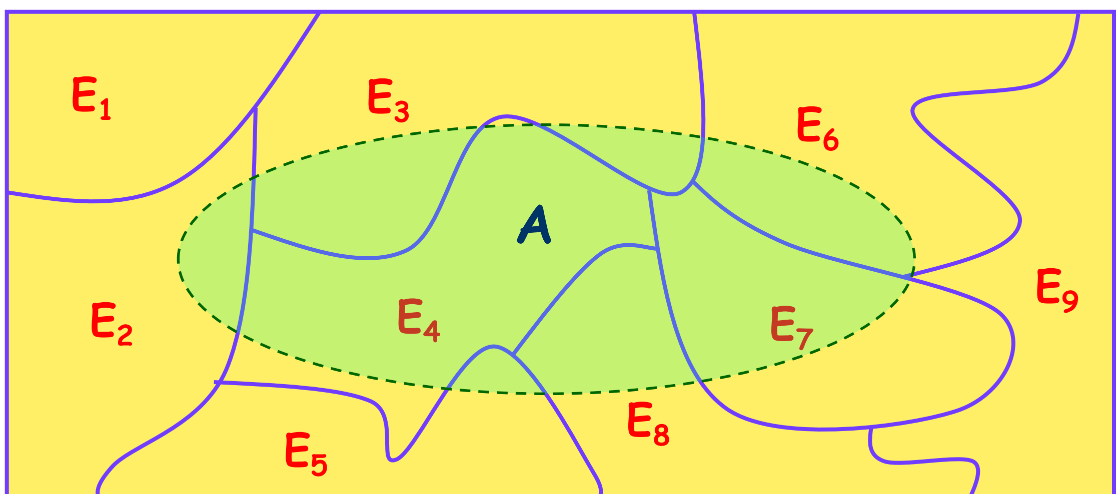
Bayes Rule

ถ้าใน Sample Space เราแบ่ง Event ออกเป็นทั้งหมด n Mutually Exclusive event $E_i ; i = 1,\ldots,n$ เราได้ผลรวมของ Event $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$ และ $E_i \cap E_j = \phi ; i \neq j$ ทำให้ $P[E_i \cap E_j] = 0$ ถ้า A เป็น Event ใดๆดังนั้น

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[E_i] P[A \backslash E_i]$$

Bayes Rule: $P[E_i \backslash A]$ สามารถหาได้จาก

$$P[E_i \backslash A] = \frac{P[E_i] P[A \backslash E_i]}{P[A]} = \frac{P[E_i] P[A \backslash E_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[E_j] P[A \backslash E_j]}$$



Properties

(1) $P[\overline{E}]$ หรือ $P[E^c] = 1 - P[E]$

(2) $P[\phi] = 0$

(3) $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2] - P[E_1 \cap E_2]$

(4) ถ้า E_1 เป็น Subset ของ E_2 เขียน $E_1 \subseteq E_2$ ดังนั้น $P[E_1] \le P[E_2]$

Example 1

- ในการส่งข้อมูลแบบ Digital เป็น Frame ขนาด 50 บิต การส่งจะสมบูรณ์ได้ก็ต่อเมื่อทั้ง Frame ไปถึงอย่างถูกต้อง ถ้าการเกิด Error ในแต่ละบิตของการส่ง(BER = Bit Error Rate) มีโอกาสจะผิดพลาดได้เท่ากับ 1/1000 จงหาว่า Frame ที่ส่งจะมี Error เฉลี่ยแล้วกี่เปอร์เซ็นต์ (FER = Frame Error Rate) ถ้าการเกิด Error แต่ละ Bit เป็น Independent

$$P[\text{Bit Error}] = 10^{-3}$$

$$P[\text{Bit Not Error}] = 1 - 10^{-3} = 0.999$$

$$P[\text{Frame Not Error}] = P[50\ \text{Bit Not Error}] = 0.999^{50}$$

$$P[\text{Frame Error}] = 1 - 0.999^{50} = 0.04879 = 4.879\%$$

Example 2

- จากสถิติ พบว่าโอกาสที่นักศึกษาชายจะสอบผ่านวิชา CPE332 มีค่าเท่ากับ 0.5 และโอกาสที่นักศึกษาหญิงจะสอบผ่านมีค่าเท่ากับ 0.4 ถ้าวิชา CPE332 เทอมนี้มีนักเรียนชาย 40 คนและนักเรียนหญิง 25 คน จงหาว่าเฉลี่ยแล้วจะมีนักเรียนตกกี่คน
  - สามารถคำนวนโดยใช้ค่าถ่วงน้ำหนัก
  - ให้ Sample Space ประกอบด้วยนักเรียนชาย(M) และนักเรียนหญิง(F) ดังนั้น S = {M,F}
    - สังเกตุว่า Set ทั้งสองเป็น ME คือ Sample Space ถูก Partition เป็นสอง Partition
    - P[M]=40/65 และ P[F]=25/65
  - ให้ Event A เป็นเหตุการณ์ที่นักศึกษาจะสอบผ่าน เราได้
  - P[A\M]=0.5 และ P[A\F]=0.4
  - จากสมการการ Partition

$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[E_i]P[A \setminus E_i] = P[M]P[A \setminus M] + P[F]P[A \setminus F]$$

$$= \frac{40}{65} \cdot 0.5 + \frac{25}{65} \cdot 0.4 = 0.4615$$

$$P[\text{Fail CPE332}] = \text{P}[\text{A}^{\text{C}}] = 1 - P[A] = 1 - 0.4615 = 0.5385 = 53.85\%$$

Example3

- ต่อจากตัวอย่างที่ 2: ถ้าเราสุ่มตัวอย่างนักศึกษามาหนึ่งคนที่ลงวิชา CPE332 เมื่อเทอมที่แล้ว จากนั้นถามว่านักศึกษาผ่านวิชานี้หรือไม่ นักศึกษาผู้นั้นตอบว่าสอบผ่านแล้ว จงคำนวณว่า
  - 1.โอกาสที่นักศึกษาผู้นั้นจะเป็นผู้หญิงเท่ากับเท่าไร
  - 2. Probability ที่นักศึกษาสอบผ่านและเป็นผู้หญิงมีเท่าไร

- 1. ต้องการหา $P[F\backslash A]$

$$P[F \backslash A] = P[FA]/P[A] = P[A \backslash F]P[F]/P[A]$$

$$= 0.4 \cdot \frac{25}{65} \cdot \frac{1}{0.4615} = 0.3334 = 33.34\%$$

- 2. ต้องการหา $P[FA]=P[F\cap A]$

$$P[F \backslash A] = P[FA]/P[A]$$

$$P[FA] = P[F \backslash A]P[A] = P[A \backslash F]P[F]$$

$$= 0.3334 \cdot 0.4615 = 0.1539 = 15.39\%$$

Random Variables

- เมื่อเรากำหนดค่าเป็นตัวเลขของทุกๆ Sample Point ใน Sample Space และถ้าให้ Variable แทนผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง ดังนั้นผลของการทดลองจะมีค่าเป็นตัวเลข และเราเรียก Variable นั้นว่าเป็น **Random Variable** ซึ่งปกติแล้วเรามักจะให้ Random Variable แทนด้วยตัว Capital
- ที่สำคัญคือ การกำหนด RV ซึ่งเป็นตัวเลขทำให้เราสามารถนำไปคำนวณต่อทางคณิตศาสตร์ได้
  - Mean
  - Variance
  - Etc.

Random Variables

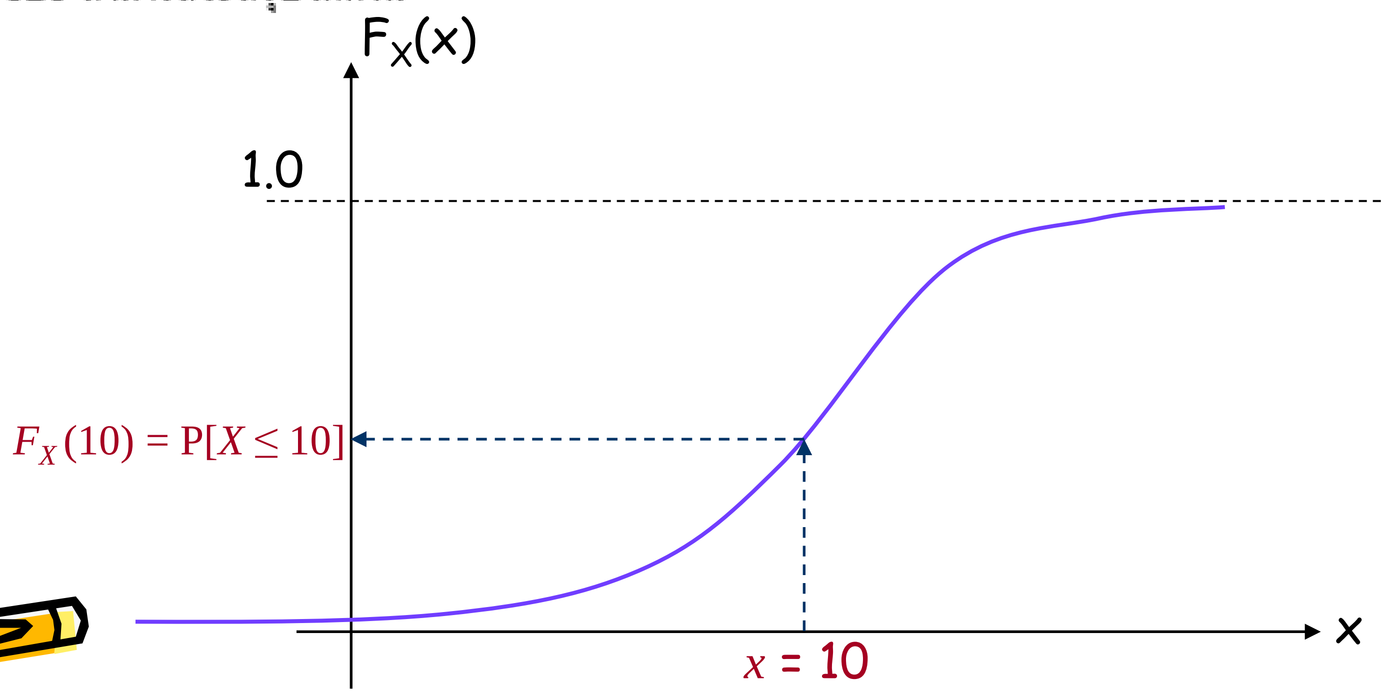
- เมื่อผลลัพธ์ของการทดลอง(Sample Space)ได้ Infinite Set การกำหนดตัวเลขมักจะเป็นตัวเลขที่ต่อเนื่อง
  - เราได้ Continuous Random Variable
- เมื่อผลลัพธ์เป็น Finite Set การกำหนดจะใช้ Set ของตัวเลข มักจะเป็น Integer
  - เราได้ Discrete Random Variable
- Probability ที่จะได้ผลลัพธ์การทดลองหนึ่งๆ คือ Probability ที่ Random Variable จะมีค่าตามที่เรากำหนด
- เราสามารถแสดงคุณสมบัติของ RV จากการ Plot ค่า Probability(y-axis) และค่าของ Random Variable(x-axis)
  - Cumulative Distribution Function (CDF)
  - Probability Density Function (PDF)

CDF:Cumulative Distribution Function of RV X

ถ้าให้ Function $F_X(x) = P[X \le x]$ และ Plot Graph ระหว่าง $F_X(x)$ vs. x (ซึ่งก็คือ Graph $P[X \le x]$ vs. x) Graph ที่ได้เราเรียกว่า Cumulative Distribution Function หรือ CDF(บางตำราใช้ Probability Distribution Function)

ลักษณะของ CDF จะเป็น Graph ที่จะไม่มีการลดค่าเนื่องจากเป็นค่าสะสม โดยจะเริ่มจากศูนย์ และมีค่าสูงสุดเป็นหนึ่ง

คุณสมบัติของ CDF สามารถจะสรุปได้ดังนี้



CDF of Normal (Gaussian) Distribution: Continuous

CDF Properties

(1) $0 \le F_X(x) \le 1$

(2) $F_X(x)$ เป็น Non-decreasing Function

(3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ และ $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(4) $F_X(x)$ เป็น Function ที่ต่อเนื่องจากทางด้านขวา นั่นก็คือ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

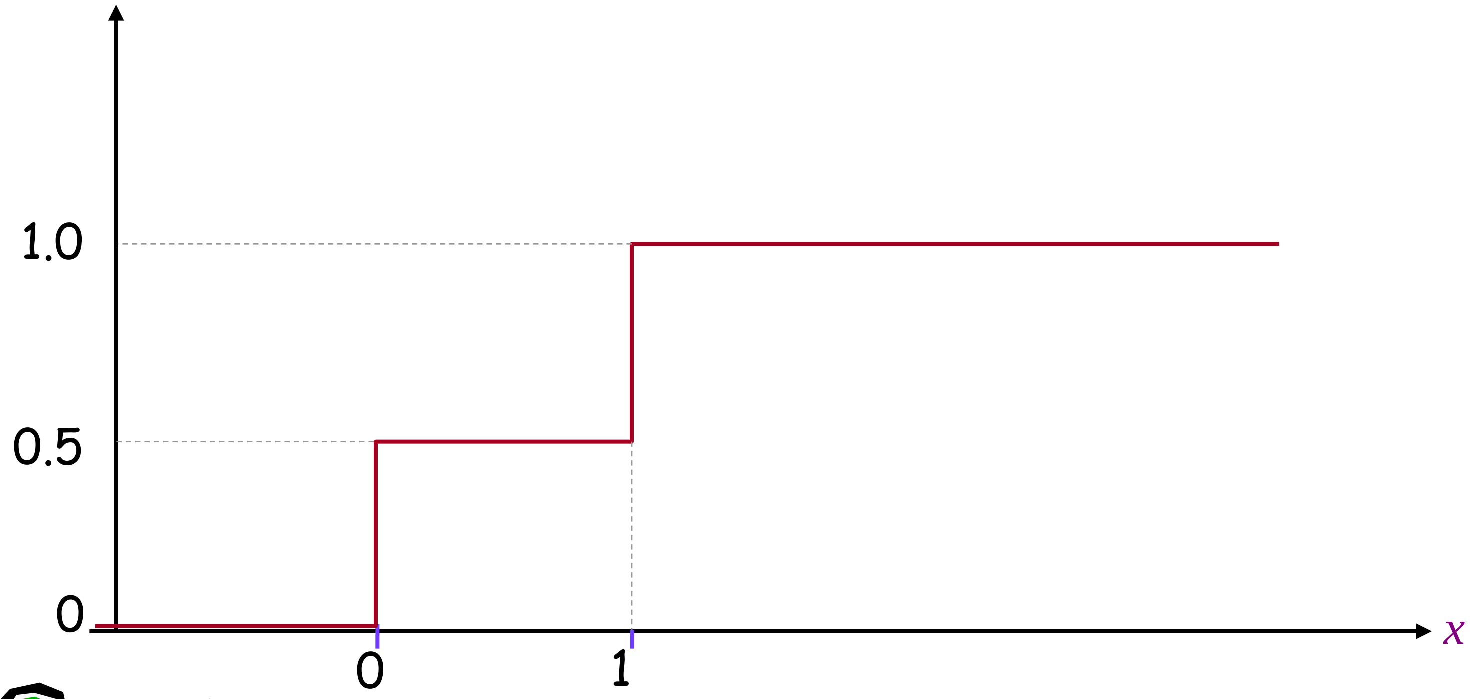
(5) $P[a < X \le b] = F_X(b) - F_X(a)$

(6) $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$

CDF การทอยเหรียญ: Discrete RV

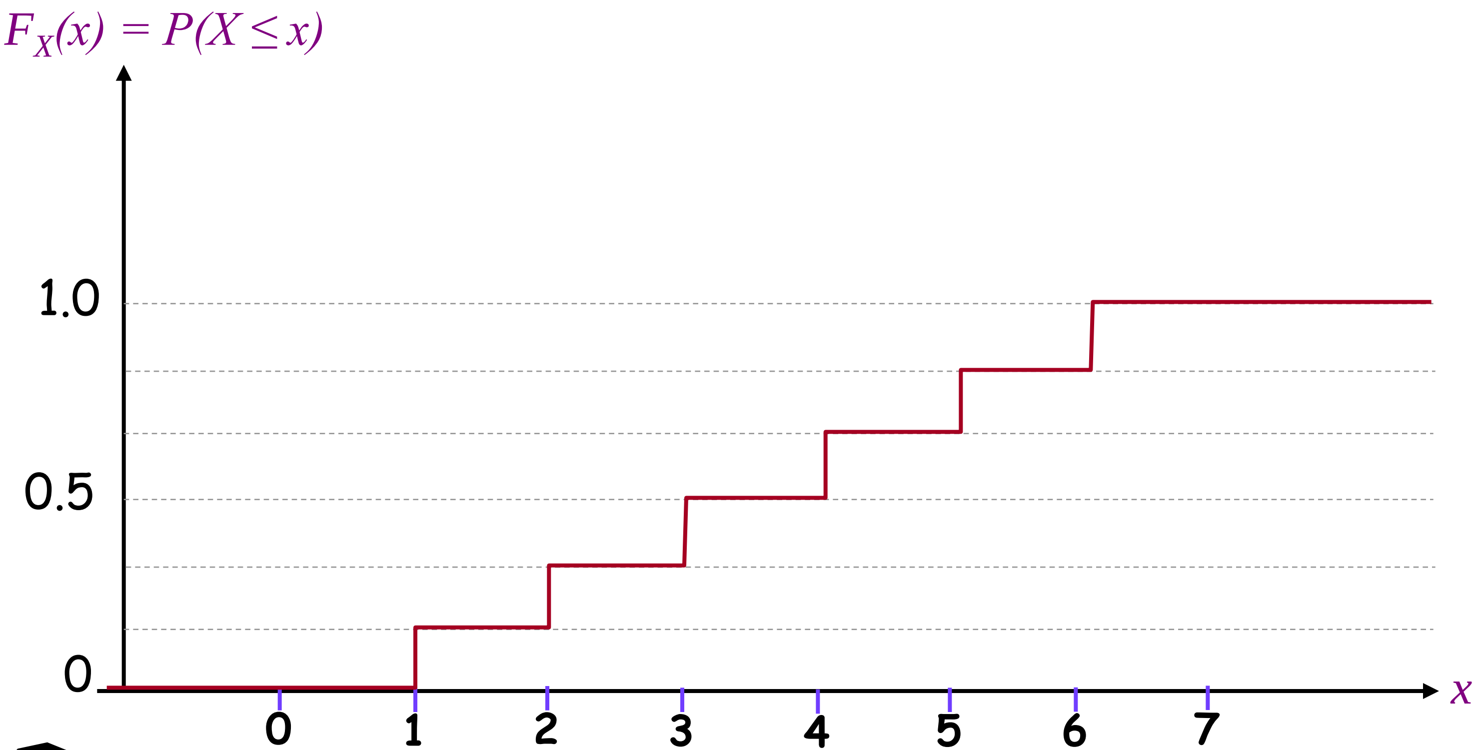
- ให้ “หัว”= 0 และ “ก้อย” = 1

$F_X(x) = P(X \le x)$



CDF การทอยลูกเต๋า: Discrete RV

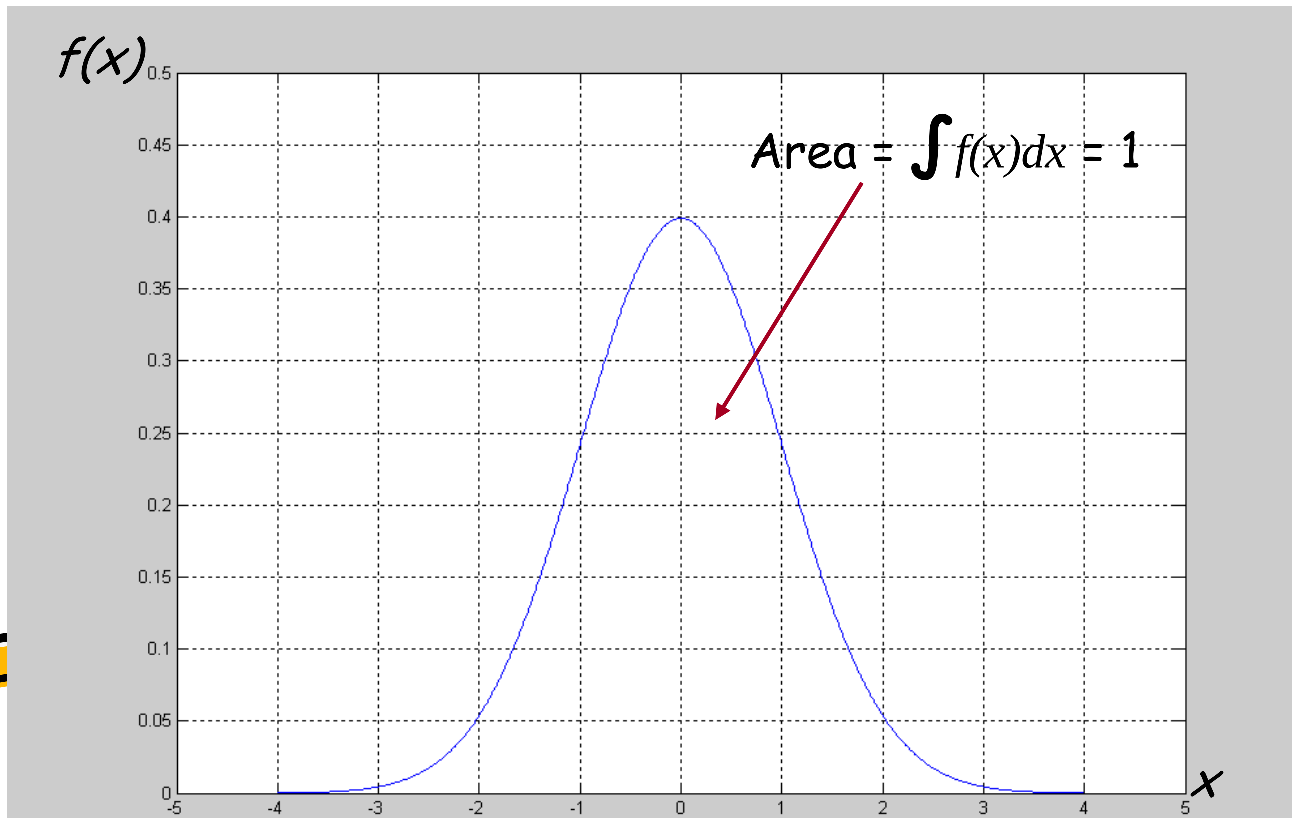
- ให้ ผลเป็นตัวเลขตามหน้าลูกเต๋า



PDF: Probability Density Function

ค่าของการเปลี่ยนแปลงใน CDF หรือ Slope ของมัน เมื่อ Plot กับแกน x เราจะได้ Probability Density Function

($f_X(x)$)หรือ PDF นั่นก็คือ $f_X(x)=\dfrac{dF_X(x)}{dx}$ และ $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x^+} f_X(x)dx$ คุณสมบัติของ PDF มีดังนี้



PDF of Normal(Gaussian) Distribution : Continuous

Properties of PDF

(1) $f_X(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

(3) $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x)dx = P[a < x \leq b)$

(4) $P[X \in A] = \int_{AreaA} f_X(x)dx$

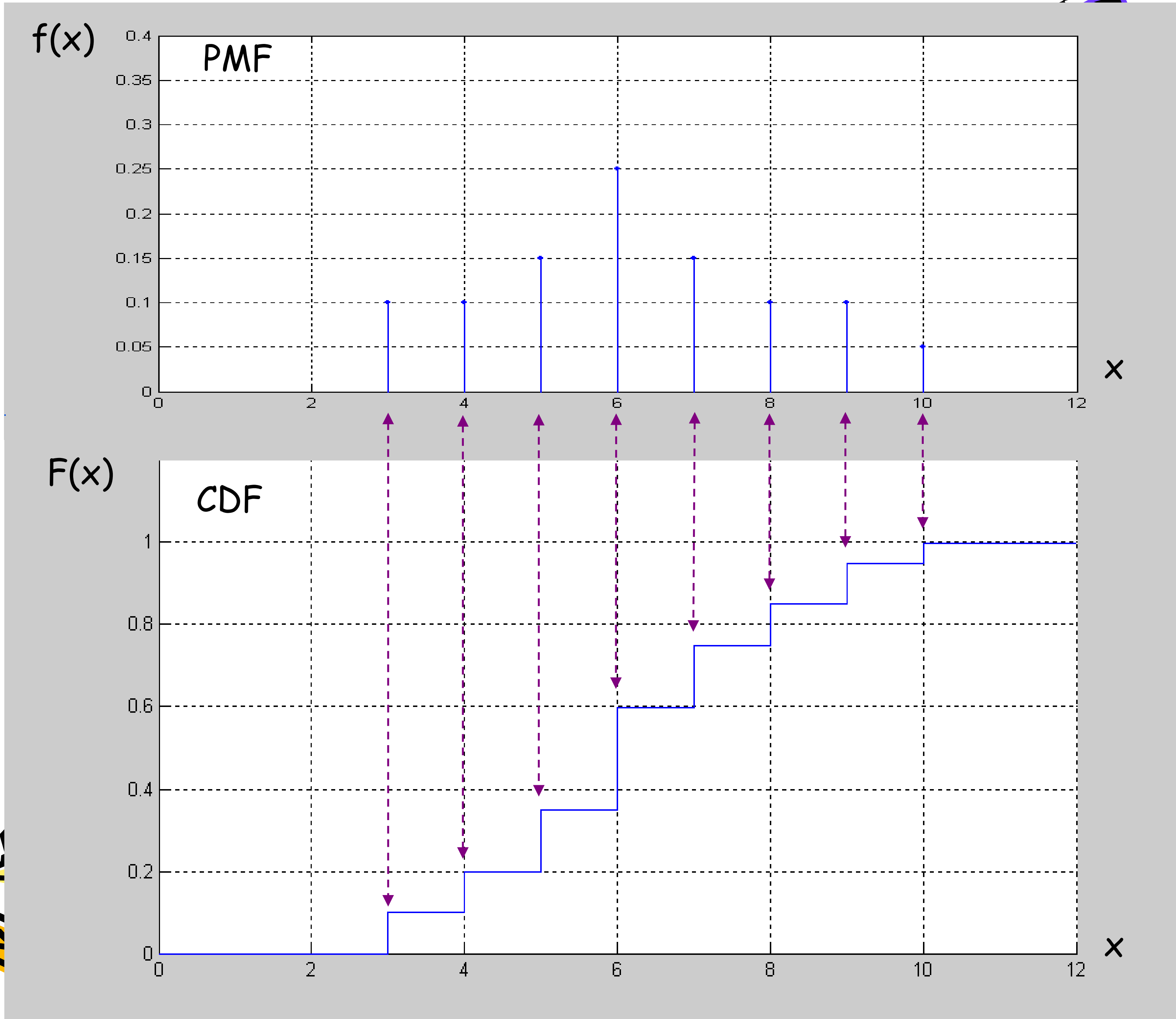
(5) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)du$

ในกรณีของ Discrete Random Variable บางครั้งเราใช้คำว่า Probability Mass Function(PMF) แทน ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$PMF = \{P_i\};\ P_i = P[X = x_i]$$

Discrete Version

- ค่าของ Variable ไม่ต่อเนื่อง
  - RV X มีค่าเฉพาะที่ $X=x_i$
- $F(x) = P(X \leq x)$
  - Function นี้มีความต่อเนื่องด้านขวามือ
  - นิยามสำหรับทุกจุดใน Domain ของ x
  - Function เป็นลักษณะขั้นบรรได
  - Monotonic Increasing Function จาก 0 ถึง 1
- $f(x_i) = P(X = x_i)$
  - นิยามเฉพาะจุด ไม่ต่อเนื่อง ค่าเป็นศูนย์ระหว่างนั้น
  - บางทีเรียก Probability Mass Function
  - $\sum f(x_i)=1$ เสมอ



f(x)
PMF
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
12
x
F(x)
CDF
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
8
10
12
x

Chapter 4 Cont. Next week

- Statistical Average
- Importance PDF
- Joint PDF
- Correlation/Covariance

- Chapter 5: Introduction to Random Process
  - Concept/Definition
  - Stationary Concept
  - Ergodic Concept
  - Autocorrelation and Cross Correlation